Chapitre 11

Applications linéaires

Dans ce chapitre, on pose $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ainsi que E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.

I Généralités

I-1 Notion d'application linéaire

Définition

Soit $L : E \to F$ une application. On dit que L est *linéaire* si ***les trois*** conditions suivantes sont vérifiées :

- E, F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$
- $\forall u, v \in E, \quad L(u+v) = L(u) + L(v)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall u \in E \quad L(\alpha u) = \alpha L(u)$

On note $\mathcal{L}(E;F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de E dans F.

Exemple 1 *(utilisable dans les exercices)* :

Si E est un espace vectoriel, l'application identité $id : E \to E,\ u \mapsto u$ est linéaire.

En effet, $\forall u, v \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $id(u+v) = u+v = id(u)+id(v)$, $id(\alpha u) = \alpha u = \alpha id(u)$

Exemple 2 :

$$L_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \to & (2x, 3x-y, y-x) \end{array}$$ est linéaire car :

$\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-ev. Soient alors $X=(x_1,x_2), Y=(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{On a}\quad L(X+Y) &= L((\underbrace{x_1+x_2}_{x}, \underbrace{y_1+y_2}_{y})) = (2x, 3x-y, y-x) \\ &= (2x_1+2x_2, 3x_1+3x_2-y_1-y_2, y_1+y_2-x_1-x_2) = L(X)+L(Y) \end{aligned}$$

$$L(\alpha X) = L((\underbrace{\alpha x_1}_{x}, \underbrace{\alpha y_1}_{y})) = (2x, 3x-y, y-x) = (2\alpha x_1, 3\alpha x_1 - \alpha y_1, \alpha y_1 - \alpha x_1) = \alpha L(X)$$

Exemple 3 *(utilisable dans les exercices)* :

Si $E=\mathbb{R}^n$; $F=\mathbb{R}^m$; $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $L_1 : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ X & \mapsto & AX \end{array}$ alors L_1 est linéaire.

Application : Dans l'exemple 1, on peut écrire : $L_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Elle est donc directement linéaire.

Proposition 1

Si $L : E \to F$ est une application linéaire, alors $L(0_E) = 0_F$

Démonstration :

$L(0_E) = L(\underbrace{0}_{\alpha} \times \underbrace{0_E}_{x}) = 0 \times L(0_E) = 0_F$ □

Théorème 2 (Caractérisation des applications linéaires :)

*Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels et $L : E \to F$ une application. L est linéaire si et seulement si **l'une des** conditions suivantes est vérifiée :*

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, u, v \in E \quad L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$
- $\forall \beta \in \mathbb{K}, u, v \in E \quad L(u + \beta v) = L(u) + \beta L(v)$

Démonstration :

• Si L est linéaire, alors

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, u, v \in E \quad L(\underbrace{\alpha u}_{\in E} + \underbrace{\beta v}_{\in E}) = L(\alpha u) + L(\beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$
- C'est i avec $\alpha = 1$.

• Si i ou ii est vérifiée, montrons que L est linéaire.

⋆ Si i est vérifiée :
Soient $u, v \in E$. On prend $\alpha = \beta = 1$ et on obtient le i de la définition. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $u \in E$. On prend $v = 0$ et on obtient le ii de la définition.

⋆ Si ii est vérifiée :
Soient $u, v \in E$. On prend $\beta = 1$ et on obtient le i de la définition.
Pour le ii de la définition : Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $u \in E$. Alors

$$L(\alpha u) = L(0_E + \alpha u) = \underbrace{L(0_E)}_{0_F} + \alpha L(u) = \alpha L(u)$$

□

Exemple 4 *(utilisable dans les exercices)* :

$D : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ est linéaire :

$C^1(\mathbb{R})$ et $C^0(\mathbb{R})$ sont deux $\mathbb{R}$-ev.

Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On a

$$D(f + \beta g) = (f + \beta g)' = f' + \beta g' = D(f) + \beta D(g)$$

D est donc linéaire par théorème de caractérisation des applications linéaires.

■ Contre-Exemple(s) :

$L: \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \to & f(0)^2 \end{array}$ n'est pas une application linéaire.

En effet, $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ est bien un espace vectoriel, mais par exemple pour $\cos \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $L(-\cos) = \cos^2(0) = 1 \neq -L(\cos)$.

Définition

On se donne une application linéaire $L : E \to F$.

- Si $L(E) \subset E$, on dit que L est un *endomorphisme* de E. On note $\mathcal{L}(E)$ à la place de $\mathcal{L}(E; E)$.
- Si L est bijective, on dit que L est un *isomorphisme*. (E peut être différent de F !)
- On dit que deux espaces vectoriels E et F sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $\varphi : E \to F$.
- Une application linéaire $L : E \to E$ est appelée *automorphisme* si c'est un endomorphisme bijectif. On note $Aut(E)$ ou $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

■ Exemple 5 :

L'application linéaire *(à prouver)* "primitive qui s'annule en a" $L_a: \begin{array}{ccc} C^0(\mathbb{R}) & \to & C^1(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & F : x \mapsto \int_a^x f \end{array}$:

- est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ car : pour tout $f \in C^0(\mathbb{R})$, on a $L(f) \in C^1(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R})$
- n'est pas un automorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ car : l'application $L : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective ; on rappelle par exemple que les fonctions continues ne sont pas toutes dérivables. . .
- n'est pas un isomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$: (là encore, non surjective car toute image de L s'annule en a, ce qui n'est pas le cas d'une fonction quelconque dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.)

■ Exemple 6 :

L'application $L: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP' - 2P \end{array}$ est un endomorphisme.

En effet, elle est **linéaire** (à faire) et de plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a $\deg L(P) = \deg(XP' + X) \leqslant \max(\deg(XP'), \deg P) = \deg P \leqslant 3$. Ainsi,

$$L(P) \in \mathbb{R}_3[X]$$

et c'est donc bien un endomorphisme

■ Contre-Exemple(s) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $L: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & X^2P' - P \end{array}$ est une application linéaire, mais pas un endomorphisme.

En effet, on a par exemple $X^n \in \mathbb{R}_n[X]$, mais $L(X^n) = nX^{n+1} - X^n \notin \mathbb{R}_n[X]$.

■ Contre-Exemple(s) :

L'application "dérivée" $d: \begin{array}{ccc} C^1(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ n'est pas un isomorphisme.

En effet, l'application n'est pas injective. Par exemple, les deux applications $f : x \mapsto x + 1$ et $g : x \mapsto x + 2$ dans $C^1(\mathbb{R})$ ont la même dérivée (donc la même image par L.

I-2 Opérations sur les applications linéaires

Proposition 3 (Combinaisons d'A.L.)

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est $\mathbb{K}$-un espace vectoriel.

Traduction : Toute combinaison linéaire finie d'applications linéaires est une application linéaire.

Démonstration :

$\mathcal{L}(E; F) \subset \mathcal{F}(E; F)$, où F est un espace vectoriel. Or, $\mathcal{F}(E; F)$ est un espace vectoriel, il suffit donc d'utiliser le théorème de caractérisation des sev.

- $\mathcal{L}(E; F)$ est non vide, car l'application nulle, notée ici $\bar{0}$, est linéaire :

$$\begin{aligned} \bar{0}(\alpha u + \beta v) &= 0_F \\ &= 0_F + 0_F \\ &= \alpha\bar{0}(u) + \beta\bar{0}(v) \end{aligned}$$

- Conservation des combinaisons linéaires :

On pose $f, g \in \mathcal{L}(E; F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $f + \lambda g \in \mathcal{L}(E; F)$:
Soient $u, v \in E$ et $\alpha, \mu \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)(\alpha u + \beta v) &= f(\alpha u + \beta v) + \lambda g(\alpha u + \beta v) \\ &= (\alpha f(u) + \beta f(v)) + \lambda(\alpha g(u) + \beta g(v)) \\ &= \alpha(f(u) + \lambda g(u)) + \mu(f(v) + \lambda g(v)) \\ &= \alpha(f + \lambda g)(u) + \beta(f + \lambda g)(v) \end{aligned}$$

D'où $f + \lambda g \in \mathcal{L}(E, F)$ $\square$

■ Exemple 7 :

$$\begin{array}{rccc} L: & C^1(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & f+2f' \end{array}$$ est linéaire :

Tout d'abord, $C^1(\mathbb{R})$ et $C^0(\mathbb{R})$ sont deux $\mathbb{R}$-ev.
On remarque que

$$L = id + 2d$$

où $id: \begin{array}{ccc} C^1(\mathbb{R}) & \to & C^1(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f \end{array}$ est l'application identité
et $d: \begin{array}{ccc} C^1(\mathbb{R}) & \to & C^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ sont deux applications linéaires
Ainsi, L est bien une application linéaire, par combinaison linéaire d'applications linéaires.

Proposition 4 (Composition d'A.L.)

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors

$$f \in \mathcal{L}(E,F), g \in \mathcal{L}(F,G) \implies g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$$

Démonstration :

E et G sont des $\mathbb{K}$ e.v. Soient $u, v \in E$ et $\beta \in \mathbb{K}$. Alors

$$g \circ f(u+\beta v) \underset{\text{linéarité de } f}{=} g\left(f(u)+\beta f(v)\right) \underset{\text{linéarité de } g}{=} g\left(f(u)\right)+\beta g\left(f(v)\right)$$

Ainsi, $g \circ f$ est bien linéaire par TCAL. □

■ Exemple 8 :

Si

$$f : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto 2P - P'' \in \mathbb{R}[X] \quad \text{et} \quad g : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(1)$$

alors f, g sont deux applications linéaires (à faire) et donc $f \circ g$ également.
On peut également l'observer si on fait le calcul :

$$f : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto 2P(1) - P''(1) \in \mathbb{R}$$

qui est bien linéaire.

Produit non linéaire

Si $f : E \to F$ et $g : E \to F$ sont des applications linéaires, **leur produit** h telle que $h(u) = f(u)g(u)$ pour tout $u \in E$, **n'est pas (jamais) une application linéaire** si elle est non nulle.

Soit par exemple x tel que $h(x) \neq 0$. Alors

$$h(2x) = f(2x)g(2x) = 2 \times 2f(x)g(x) = 4h(x) \neq 2h(x).$$

Notation :

Dans le cas des applications linéaires, on note la plupart du temps gf à la place de $g \circ f$. **Attention**, ce n'est pas la multiplication de deux fonctions, mais bien la composition.
Ainsi, dans le cas d'un endomorphisme f, on notera f^n au lieu de $\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

(Ces notations sont dûes à la relation entre applications linaires et matrices.)

I-3 Lien entre matrices et applications linéaires en dimension finie

I.3-a) Matrice d'une application linéaire en dimension finie

Dans ce paragraphe, on suppose que $\boldsymbol{E}$ **et** $\boldsymbol{F}$ **sont de dimension finie.**

Définition

Soient E, F deux espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_m)$. Pour une application $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on appelle *matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$* la matrice donnant les coordonnées des $f(e_i)$ en fonction des f_j.

$$M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \ldots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} * & \ldots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \ldots & * \end{pmatrix} \end{array}$$

Notation :

Si $E = F$ et que $\boldsymbol{\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F}$, on parle simplement de *la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$*, où $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E$ et on note $\boldsymbol{M_{\mathcal{B}}(f)}$ au lieu de $\boldsymbol{M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)}$.

Proposition 5

Soient E, F deux espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $u \in E$. Alors

$$\boldsymbol{M_{\mathcal{B}_F}(f(u)) = M(f)_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}\, M_{\mathcal{B}_E}(u)}$$

Démonstration :

On note $\mathcal{B}_E) = (e_1, \ldots, e_n)$ et $u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$. Alors $f(u) = \alpha_1 f(e_1) + \ldots + \alpha_n f(e_n)$.
Si on note C_i la i$^{\text{ème}}$ colonne de $A = M(f)_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}$, on a par définition

$$C_i = M_{\mathcal{B}_F}(f(e_i)).$$

Par calcul matriciel, on obtient alors

$$A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 C_1 + \ldots + \alpha_n C_n = M_{\mathcal{B}_F}(\alpha_1 f(e_1) + \ldots + \alpha_n f(e_n)) = M_{\mathcal{B}_F}(f(u))$$

□

Exemple 9 :

Soit $L_0 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & \int_0^X P \text{ : primitive de } P \text{ qui s'annule en } 0 \end{array}$.

- Matrice dans les bases canoniques :

La matrice de L_0 dans les bases $(1, X, X^2)$, $(1, X, X^2, X^3)$ est

$$\begin{array}{c|ccc} & L_0(1) & L_0(X) & L_0(X^2) \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ X & 1 & 0 & 0 \\ X^2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ X^3 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}$$

car $L_0(1) = X$
$L_0(X) = \frac{X^2}{2}$
$L_0(X^2) = \frac{X^3}{3}$

- Image d'un vecteur : $L_0(1 + 2X - X^2) = X + X^2 - \frac{1}{3}X^3$ car

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- Matrice de L_0 dans d'autres bases :

La matrice de L dans les bases $(1, X, X^2)$, $(1, X - 1, X^2 - X, X^3)$ est

$$\begin{array}{c|ccc} & L_0(1) & L_0(X) & L_0(X^2) \\ \hline 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ X-1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ X^2-X & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ X^3 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}$$

car $L_0(1) = X = (X - 1) + 1$
$L_0(X) = \frac{X^2}{2} = \frac{1}{2}\big((X^2 - X) + X\big) = \frac{1}{2}(X^2 - X) + \frac{1}{2}(X - 1) + \frac{1}{2}$
$L_0(X^2) = \frac{X^3}{3}$

Proposition 6

Soient E, F, G des ev de dimension finie, $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ des bases respectives de E, F, G.

- Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors

$$M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\alpha f + \beta g) = \alpha M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) + \beta M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g)$$

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors

$$M_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(gf) = M_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g) M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$$

- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est inversible ssi $M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$ est inversible et dans ce cas

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f^{-1}) = \left(M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)\right)^{-1}$$

`Démonstration :`

i) et ii) admis. iii) est conséquence de ii). □

Exemple 10 :

Soit l'application $T : \; L : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & 2P + \text{primitive de } P \text{ qui s'annule en } 0 \end{array}$.

On a alors $T = 2id + L_0$ où id est l'application identité et L_0 l'application de l'exemple précédent. Ainsi, dans les bases canoniques respectives $\mathcal{B}_2 = (1, X, X^2), \mathcal{B}_3 = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$

$$M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(T) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Remarque :

Dans le but de savoir retrouver plus facilement et retenir les différentes formules de ce chapitre, on se propose de schématiser une application linéaire $L : E \to F$ de la manière suivante :

$$\underset{\text{base } \mathcal{B}_F}{F} \xleftarrow{L} \underset{\text{base } \mathcal{B}_E}{E}$$

(Oui, c'est écrit de la droite vers la gauche, au lieu du contraire habituellement pour les fonctions !) De cette manière, **c'est écrit dans le même sens que les formules de composition et les formules matricielles :**

$$g \circ f : \quad \underset{\text{base } \mathcal{B}_G}{G} \xleftarrow{g} \underset{\text{base } \mathcal{B}_F}{F} \xleftarrow{f} \underset{\text{base } \mathcal{B}_E}{E} \quad \text{décrit} \quad M_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(f \circ g) = M_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g) M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$$

et

$$\begin{array}{ccc} \underset{\text{base } \mathcal{B}_F}{F} & \xleftarrow{f} & \underset{\text{base } \mathcal{B}_E}{E} \\ f(u) & \longleftarrow\!\shortmid & u \end{array} \qquad \text{décrit} \qquad M_{\mathcal{B}_F}(f(u)) = M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) M_{\mathcal{B}_E}(u)$$

I.3-b) Changement de base en tant qu'application linéaire

Rappelons que pour changer de base "à l'intérieur" d'un même espace vectoriel E, on dispose de la matrice de passage :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{array}{c|ccc} & e'_1 & \dots & e'_n \\ \hline e_1 & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \\ e_n & \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{array}$$

avec $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E.

Explications :

En regardant de plus près, on observe qu'en fait **cette matrice est celle de l'application "identité"** dans la base de départ $\mathcal{B}'$ et base d'arrivée $\mathcal{B}$:

$$id : \underset{\text{base } \mathcal{B}}{E} \leftarrow \underset{\text{base } \mathcal{B}'}{E}$$

i.e.

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

On observe alors que les formules des images par une AL appliquée à la matrice identité donne :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id) M_{\mathcal{B}'}(u)$$

i.e.

$$M_{\mathcal{B}}(u) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') M_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}'}(u)$$

ce qui démontre immédiatement la formule de changement de base annoncée dans le cours sur les espaces vectoriels ! Quant à l'autre formule annoncée dans ledit chapitre et non démontrée,

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} P_{\mathcal{C},\mathcal{D}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$$

la démonstration est tout simplement

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(id) M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(id) = M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(id \circ id) = M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(id)$$

(Formule dont on déduit également le fait que $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.)

I.3-c) Changement de base dans dans "E" et/ou "F" pour des AL

Si on peut changer de base à l'intérieur d'un espace vectoriel, on peut également changer de base lorsque l'on souhaite exprimer matriciellement une application linéaire. En effet, il n'est pas rare de devoir adapter les bases choisies pour l'expression de $M(f)$ suivant les conditions du problème (souvent pour avoir la matrice la plus "simple" possible) Pour ce faire, on peut utiliser (et mixer) les formules existantes pour tout faire en une seule fois :

On se donne ici une application linéaire $f : E \to F$ ainsi que deux bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ de E et deux bases $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ de F.

On suppose disposer de la matrice $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ et on cherche $\mathcal{M}_{\mathcal{G},\mathcal{G}'}(f)$.

Méthode 1 : Changement de base "à vue"

On note $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ et $\mathcal{G}' = (f'_1, \dots, f'_m)$.
On cherche directement les images de tous les $f(e'_i)$ dans la base $\mathcal{G}'$ à vue.

■ **Exemple 11** :

Reprenons l'exemple de $L_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & \text{primitive de } P \text{ qui s'annule en } 0 \end{array}$.

Dans les bases $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, $\mathcal{G} = (1, X, X^2, X^3)$ la matrice de L_0 est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

On pose $\mathcal{B}' = (\underbrace{1}_{e'_1}, \underbrace{X+1}_{e'_2}, \underbrace{X^2 - X}_{e'_3})$, $\mathcal{G}' = (\underbrace{1}_{f'_1}, \underbrace{X-1}_{f'_2}, \underbrace{X^2 - X}_{f'_3}, \underbrace{X^3}_{f'_4})$.

Alors,

$$\begin{cases} f(e'_1) = & f(1) = X = X - 1 + 1 = f'_2 + f'_1 \\ f(e'_2) = & f(X-1) = f(X) - f(1) = \frac{1}{2}X^2 - X = \frac{1}{2}\left(X^2 - X\right) - \frac{1}{2}X = \frac{1}{2}f'_3 - \frac{1}{2}(f'_2 + f'_1 \\ f(e'_3) = & f(X^2 - X) = f(X^2) - f(X) = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 = \frac{1}{3}f'_4 - \frac{1}{2}(X^2 - X) - \frac{1}{2}X \\ & \quad = \frac{1}{3}f'_4 - \frac{1}{2}f'_3 - \frac{1}{2}(f'_2 + f'_1) \end{cases}$$

D'où

$$M_{\mathcal{G}',\mathcal{B}'}(L_0) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Méthode 2 : Changement de base avec formule matricielle

On utilise directement la formule matricielle :

Théorème 7 *de changement de base*

Soient E un espace vectoriel de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et F un espace vectoriel de bases respectives $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

$$M(f)_{\mathcal{G}',\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{G}'}(\mathcal{G})\ M_{\mathcal{G},\mathcal{B}}(f)\ M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

`Démonstration :`

Traduisons la situation à l'aide d'un schéma :

$$f : \underset{\text{base } \mathcal{G}'}{F} \xleftarrow{id} \underset{\text{base } \mathcal{G}}{F} \xleftarrow{f} \underset{\text{base } \mathcal{B}}{E} \xleftarrow{id} \underset{\text{base } \mathcal{B}'}{E}$$

La formule de composition de matrices donne

$$M(f)_{\mathcal{G}',\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{G}',\mathcal{G}}(id)\ M(f)_{\mathcal{G},\mathcal{B}}\ M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id)$$

ce qui correspond exactement à la formule de changement de bases annoncée dans le théorème □

■ Exemple 12 :

Reprenons l'exemple de $L_0 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & \text{primitive de } P \text{ qui s'annule en } 0 \end{array}$.

Dans les bases $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, $\mathcal{G} = (1, X, X^2, X^3)$ la matrice de L_0 est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

On pose $\mathcal{G}' = (1, X-1, X^2 - X, X^3)$. D'où $M_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Les opérations $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ puis $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$ permettent de calculer

$$M_{\mathcal{G}'}(\mathcal{G}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$M_{\mathcal{G}',\mathcal{B}}(L_0) = M_{\mathcal{G}'}(\mathcal{G}) M_{\mathcal{G},\mathcal{B}}(L_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Corollaire

En particulier, pour le cas d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, on a

$$M(f)_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\ M_{\mathcal{B}}(f)\ M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

ou autrement dit,

$$M' = P^{-1} M P$$

où P est la matrice de changement de base $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $M = M_{\mathcal{B}}(f)$ et $M' = M(f)_{\mathcal{B}'}$.

Définition

Soient M et M' deux matrices. S'il existe une matrice P inversible telle que

$$M' = P^{-1} M P \qquad (\text{ou} \quad M' = P M P^{-1}\ )$$

alors on dit que M et M' sont *semblables*.

II Image, noyau, injectivité, surjectivité

II-1 Image (d'un sev ou de E)

On rappelle que pour tout sous-ensemble A de E et une fonction f quelconque, on note

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Voyons ce qui se passe si f est linéaire et que A est plus précisément un sev. En premier lieu, si c'est un sev de dimension finie :

Propriété 8

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et H un sev de E avec $H = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_n)$ (la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ n'étant pas forcément libre...), alors

$$f(H) = f\left(\mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_n)\right) = \mathrm{Vect}\,\big(f(v_1), \ldots, f(v_n)\big)$$

Démonstration :

Supposons que $H = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_n)$.

- Montrons que $f(H) \subset \mathrm{Vect}\,\big(f(v_1), \ldots, f(v_n)\big)$:

Soit $y \in f(H)$. Alors, il existe $x \in H$ tel que $f(x) = y$. Or, comme $H = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_n)$, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

d'où

$$y = f(x) = f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n) \in \mathrm{Vect}\,\big(f(v_1), \ldots, f(v_n)\big)$$

- Montrons que $\mathrm{Vect}\,\big(f(v_1), \ldots, f(v_n)\big) \subset f(H)$:

"démo 1" : on a $f(v_1), \ldots, f(v_n) \in f(H)$ et on verra dans la généralisation que $f(H)$ est un espace vectoriel. Par définition du Vect (plus petit espace vectoriel), on a donc bien $\mathrm{Vect}\,\big(f(v_1), \ldots, f(v_n)\big) \subset f(H)$.

"démo 2" : Soit $y \in \mathrm{Vect}\,\big(f(v_1), \ldots, f(v_n)\big)$. Il existe alors $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$y = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n) = f\big(\underbrace{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n}_{\text{on note ceci } x}\big)$$

Or $x \in H$, donc $y \in f(H)$.

⋆ Conclusion : Par double inclusion, on a bien $f(H) = \mathrm{Vect}\,\big(f(v_1), \ldots, f(v_n)\big)$. □

■ Exemple 13 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (2x + y, -x)$ qui est une application linéaire. On pose

$H = \text{Vect}(1,1)$. Alors

$$f(H) = \text{Vect}\big(f(1,1)\big) = \text{Vect}\big((3,-1)\big)$$

Pour des sev quelconques :

Proposition 9

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et H un sous espace vectoriel de E, alors $f(H)$ est un sev de F.

Démonstration :

Supposons que H soit un sev de E. Montrons que $f(H)$ est un sev de F :

- $f(H)$ est non vide, car $0_E \in H$ et $0_F = f(0_E) \in f(H)$.
- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in f(H)$. Montrons que $\lambda x + \mu y \in f(H)$:
Il existe $x', y' \in H$ tels que $f(x') = x$ et $f(y') = y$. Ainsi,

$$\lambda x + \mu y = \lambda f(x') + \mu f(y') = f(\underbrace{\lambda x' + \mu y'}_{\in H}) \in f(H)$$

Par caractérisation des sous-espaces vectoriels, $f(H)$ est bien un espace vectoriel. □

Appliqué maintenant à $H = E$:

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle *image* de f et on note $\text{Im}f$ l'espace vectoriel $f(E)$.

Remarque :

Si E est de dimension finie, avec comme base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, on sait alors que

$$\text{Im}\, f = \text{Vect}\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$$

Exemple 14 :

Reprenons l'exemple précédent avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x,y) \mapsto (2x+y, -x)$. Sa matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On sait alors que $\text{Im}\, f = \text{Vect}\big(\text{"colonnes de } A\text{"}\big) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie, alors $Im\, f$ l'est aussi est de plus

$$\dim Im\, f \leqslant \dim E$$

Exemple 15 :

On considère maintenant $L_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_0^X P(t)\, dt \end{array}$.

On admet ici qu'elle est linéaire.

1. $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3 < \infty$; mais $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.
2. Malgré tout, d'après la propriété,

$$\dim \text{Im}\, L_0 \leqslant \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3.$$

Ce qui se vérifie car

$$\text{Im}\, L_0 = X\mathbb{R}_2[X] \qquad \textit{(exercice)}$$

Définition

Si $\text{Im}\, f$ est un espace vectoriel de dimension finie, on appelle *rang de f* et on note $\text{rg}\, f$ la dimension de $\text{Im}\, f$. (i.e. $\text{rg}\, f = \dim(\text{Im}\, f)$.)

II-2 Noyau

Contrairement à la partie précédente, on s'intéresse maintenant aux "images réciproques", plus précisément celles de 0_F. On rappelle avec les notations utilisées, que $f(0_E) = 0_F$. En revanche, rien ne garantit qu'il n'y a pas d'autres éléments d'image nulle.

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle *noyau* de f et on note $\ker f$ l'ensemble des vecteurs d'image 0_F :

$$\ker f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$$

Le commentaire fait ci-dessus nous dit en particulier que :

Propriété 10

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $0_E \in \ker f$.

■ Exemple 16 :

On considère $L: \begin{array}{ccc} C^1(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f - f' \end{array}$

Alors $\ker L = Vect(exp)$:

En effet,
$$f \in \ker L \quad \Leftrightarrow \quad f - f' = 0$$
qui est une équation différentielle dont on connait l'ensemble des solutions $\{x \mapsto ke^x, k \in \mathbb{R}\} = Vect(exp)$.

Proposition 11

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$. $\ker f$ est un sev de E.

Démonstration :

- $\ker f$ est non vide, car $0_E \in \ker f$ d'après la propriété précédente.

- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \ker f$. Montrons que $\lambda x + \mu y \in \ker f$, c'est-à-dire $f(\lambda x + \mu y) = 0_F$:
$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda \underbrace{f(x)}_{=0_F} + \mu \underbrace{f(y)}_{=0_F} = 0_F$$

Par caractérisation des sous-espaces vectoriels, $\ker f$ est bien un espace vectoriel.
□

II-3 Injection, surjection

Théorème 12 *de caractérisation*

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
. f est surjective si et seulement si $F = Imf$.
. f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$.

Démonstration :

• Montrons que f est surjective si et seulement si $F = \mathrm{Im} f$:

Il est clair que, dans tous les cas, $\mathrm{Im}\, f \subset F$
On a $F = \mathrm{Im} f \Leftrightarrow$ tout élément de F admet un antécédent $\Leftrightarrow f$ est surjective.

• Montrons que f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$:

. Comme $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E, on a $\{0_E\} \subset \ker f$.

. Montrons que f est injective si et seulement si $\ker f \subset \{O_E\}$:

⋆ Supposons que f est injective et montrons que $\ker f \subset \{O_E\}$:

Soit $x \in \ker f$. Alors
$$f(x) = 0_F = f(0_E)$$
par injectivité, on a
$$x = 0_E$$
⋆ Supposons que $\ker f \subset \{O_E\}$ et montrons que f est injective :
Soient $x, y \in F$ tels que
$$f(x) = f(y)$$
par linéarité, on a
$$f(x-y) = 0_F$$
i.e.
$$x - y \in \ker f \subset \{0_E\}$$
et donc $x = y$.
□

■ Exemple 17 :

Reprenons l'exemple $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x,y) \mapsto (2x+y, -x)$. Étudions son injectivité.

Etant donné qu'on a une formule, on peut calculer son noyau par exemple de la manière suivante :
$$X = (x,y) \in \ker f \Leftrightarrow f(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y, = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$
Ce qui donne comme résultat
$$\ker f = \{0\}$$
ainsi, f est bien injective.

■ Exemple 18 :

Sur l'exemple précédemment traité avec $L: \begin{array}{ccc} C^1(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f - f' \end{array}$ on avait vu que $\ker L = Vect(exp)$. L'application n'est donc pas injective.

Remarque :

Étant donné les inclusions $\mathrm{Im}\, f \subset F$ et $\{0_E\} \subset \ker f$ triviales, en pratique, on utilisera souvent le théorème suivant :

Théorème 13 *de caractérisation n° 2*

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
. f est surjective si et seulement si $F \subset Imf$.
. f est injective si et seulement si $\ker f \subset \{0_E\}$.

Exercice 1

Montrer que $L_0 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \text{primitive de } P \text{ qui s'annule an } 0 \end{array}$ est injective (mais non bijective).

⋆ Montrons que L est injective :

On sait que L est une application linéaire. Alors L est injective ssi $\ker L \subset \{0\}$.
Soit $P \in \ker L$. Alors $L(P) = 0$, Or, $L(P)$ est une primitive de P par construction. D'où, en dérivant :

$$P = (L(P))' = 0' = 0$$

D'où $\ker L \subset \{0\}$ et donc L injective.

⋆ Montrons que L n'est pas surjective :

Il s'agit de montrer que certains éléments de $\mathbb{R}[X]$ n'ont pas d'antécédents. Supposons que $Q \in \mathbb{R}[X]$ et qu'il existe un antécédent P, c'est-à-dire $L(P) = Q$. En dérivant, on trouve $P = Q'$.
Prenons dans ce cas Q une constante non nulle (prenons par exemple 1), on obtient

$$P = Q' = 0$$

Mais dans ce cas, on avait en réalité

$$1 = Q = L(P) = L(0) = 0$$

ce qui est contradictoire. Ainsi, Q ne pouvait par avoir d'antécédent et donc L n'est pas surjective.

Remarque :

Une application $f \in \mathcal{L}(E; F)$ injective est un isomorphisme de E sur $\operatorname{Im} f \subset F$.

III Applications linéaires en dimension finie

Dans cette section, on se donne E, F deux espaces vectoriels, avec E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

III-1 Rang et matrices

On rappelle que par définition, $rg\, f = \dim Im\, f$ (valide car E de dimension finie entraine $Im\, f$ nécessairement de dimension finie).

Théorème 14

Si F est de dimension finie, alors, pour toutes bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F, on a

$$rg\, f = rg\, (M(f)_{\mathcal{B}',\mathcal{B}})$$

En particulier, on obtient que $rg\left(M(f)_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\right)$ ne dépend pas des bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$.

Démonstration :

On pose $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Alors, la matrice $M(f)_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ n'est que l'expression des vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Ainsi,

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f \underbrace{=}_{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(f(e_1),\ldots,f(e_n)\right)} \dim \operatorname{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right) = \operatorname{rg} M(f)_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

□

III-2 Image d'une base et injectivité

Théorème 15

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. les conditions suivantes sont équivalentes :

- *f est injective*
- *l'image de toute base de E est une famille libre de F*
- *l'image d'une base de E est une famille libre de F*
- $\dim E = rg\, f$

Démonstration :

- Montrons que $i \Rightarrow ii)$:

Supposons que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ soit injective et soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.

. Montrons que $f(\mathcal{B}) = \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est une famille libre :

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 f(e_1) + \ldots + \lambda_n f(e_n) = 0$. Par linéarité de f, on a $f(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) = 0$.
Par injectivité de f, on trouve

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$$

puis par liberté de $\mathcal{B}$, on obtient $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

. Conclusion : $f(\mathcal{B})$ est une famille libre dans F.

- Montrons que $ii) \Rightarrow iii)$: trivial !

- <u>Montrons que $iii) \Rightarrow iv)$:</u>

Soit $\mathcal{B}$ une base de E telle que $f(\mathcal{B})$ est une famille libre base de F. Donc

$$\mathrm{rg}\, f = \dim Imf = \dim Vect\,(f(\mathcal{B})) \underbrace{=}_{f(\mathcal{B})\text{ libre}} \mathrm{card}\, f(\mathcal{B}) = \mathrm{card}\,\mathcal{B} = \dim E$$

- <u>Montrons que $iv) \Rightarrow i)$:</u>

Supposons $iv)$ et montrons $i)$, c'est-à-dire que f est injective. D'après les propriétés des applications linéaires, cela revient à montrer que $\ker f \subset \{0_E\}$.

Soit $x \in \ker f$. On pose $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Il existe donc $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \alpha_1 e_1 + \ldots \alpha_n e_n$$

En appliquant f, on obtient, par linéarité,

$$0 = f(x) = \alpha_1 f(e_1) + \ldots \alpha_n f(e_n)$$

Par $iv)$, la famille $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est libre. D'où $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ et donc $x = 0$.
L'application f est donc injective. □

■ Exemple 19 :

Soit $L_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & \text{primitive de } P \text{ qui s'annule an } 0 \end{array}$.

On admet ici qu'elle est bien définie et linéaire. Voyons qu'elle est injective encore d'une autre manière par-rapport au cas $L_0 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ traité précédemment.

On pose la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$. On observe alors que son image par L est

$$L_0(\mathcal{B}) = (f(1), f(X), f(X^2)) = \left(X, \frac{1}{2}X^2, \frac{1}{3}X^3\right)$$

Ceci est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$ (car c'est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés). L_0 est donc injective. ("iii⇒ i)" du théorème)

Remarque :

Généralement, la technique de l'exemple précédent n'est pas la méthode la plus pertinente pour démontrer l'injectivité. La technique du noyau s'avère souvent plus efficace.

Corollaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- *f est un isomorphisme ;*
- *l'image de toute base de E est une base de F.*
- *l'image d'une base de E est une base de F.*

Démonstration :

. On rappelle que, d'après une proposition précédente, $f(\mathcal{B}) = \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$.

- <u>Montrons que $i) \Rightarrow ii)$:</u> Supposons que f est un isomorphisme. Alors :

. comme f est injective, d'après le théorème précédent, l'image d'une base de E est une base de $\mathrm{Im}\, f$.
. comme f est surjevtive, $\mathrm{Im}\, f = F$. L'image d'une base de E est une base de $\mathrm{Im}\, f = F$.

- <u>Montrons que $ii) \Rightarrow iii)$:</u> trivial !

- <u>Montrons que $iii) \Rightarrow i)$:</u> Soit $\mathcal{B}$ une base telle que $f(\mathcal{B})$ est une base de F.

. Montrons que f est surjective : . Alors,

$$F = \mathrm{Vect}\, f(\mathcal{B}) = \mathrm{Im}\, f$$

f est donc surjective.
. Montrons que f est injective : Comme $F = \mathrm{Im}\, f$, alors l'image d'une base de E est une base de $\mathrm{Im}\, f$. D'après le théorème précédent, f est donc injective.
□

■ Exemple 20 :

Revoyons que $L_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & \int_0^X P \end{array}$ n'est pas un isomprphisme :

En effet, l'image de la base $(1, X, X^2)$ est $(f(1), f(X), f(X^2)) = \left(X, \frac{1}{2}X^2, \frac{1}{3}X^3\right)$, qui n'est pas une base de $\mathbb{R}_3[X]$ car c'est une famille de cardinal 3 dans $\mathbb{R}_3[X]$ de dimension 4.

Corollaire

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{G}$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si f est un isomorphisme, alors toute matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{G}}(f)$ est carrée.

Démonstration :

On note $n = \dim E$ et $\mathcal{F} = (f(e_1), \ldots f(e_n))$ où $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
D'après le corollaire précédent, on sait que $\mathcal{F}$ est une base de F, donc $\dim F = n$. Comme

$$\dim E = \dim F$$

la matrice est donc carrée. $\square$

Corollaire

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{G}$ et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$f \text{ est un isomorphisme ssi } M_{\mathcal{B},\mathcal{G}}(f) \text{ est inversible.}$$

Démonstration :

On note $\mathcal{F} = \{f(e_1), \ldots f(e_n)\}$ où $\mathcal{B} = e_1, \ldots, e_n$.

- Supposons que f est un isomorphisme.

Alors, d'après le corollaire précédent, la matrice $M = M_{\mathcal{B},\mathcal{G}}(f)$ est carrée. Ses vecteurs colonnes qui forment la famille $\mathcal{F}$ sont libres car l'image $\mathcal{F}$ de la base $\mathcal{B}$ est une base de F (corollaire d'avant).

- Supposons que la matrice est inversible.

Alors les vecteurs colonnes $\mathcal{F}$ sont libres et de cardinal $n = \dim F$. Autrement dit, ils forment une base de F. D'après le cours précédent (corollaire), comme l'image $\mathcal{F}$ d'une base $\mathcal{B}$ de E par f est une base de F, alors c'est un isomorphisme.
$\square$

III-3 Théorème du rang et conséquences

Théorème 16 *du rang*

Supposons que E soit un espace vectoriel de dimension finie, que F soit un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim E = \dim \ker f + \operatorname{rg} f$$

Démonstration :

$\ker f$ est un sous espace de E de dimension finie. On note $\mathcal{B}_k = (e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\ker f$. D'après le théorème de la base incomplète, on sait que l'on peut compléter $\mathcal{B}_k$ en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.
Notons $G = Vect(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ et f_G l'application linéaire

$$f_G : \begin{array}{ccc} G & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

- Montrons que f_G est injective :

Soit $x \in \ker f_G$. Alors $x \in G$ et $0_F = f_G(x) = f(x)$, d'où $x \in \ker f \cap G = \{O_E\}$.
Ainsi, $x = O_E$ et donc $\ker f_G \subset \{0_E\}$ Comme f_G est injective, on obtient en particulier $\dim G = \dim \operatorname{Im} f_G$, c'est-à-dire

$$n - r = \dim \operatorname{Im} f_G,$$

autrement dit,

$$\boxed{\dim E - \dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f_G}$$

- Montrons que $\operatorname{Im} f_G = \operatorname{Im} f$:

Par définition de f_G, il est clair que $\operatorname{Im} f_G \subset \operatorname{Im} f$.

Montrons que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f_G$: Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe alors $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
Or, comme $\mathcal{N}$ est une base de E, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \underbrace{\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r}_{\in \ker f} + \underbrace{\alpha_{r+1} e_{r+1} + \ldots + \alpha_n e_n}_{\in G}$$

D'où

$$y = f(x) = \underbrace{f(a)}_{=0_F} + f(\underbrace{\alpha_{r+1} e_{r+1} + \ldots + \alpha_n e_n}_{g \in G})$$

autrement dit, il existe $g \in G$ tel que $y = f(g)$. Ainsi, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f_G$.

Cette égalité implique clairement que $\boxed{\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f_G.}$

- Conclusion : Les deux égalités de dimension obtenues en encadré donnent clairement le résultat annoncé. $\square$

Théorème 17

Soient E, F deux espaces vectoriels **de même dimension** *et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a*

$$f \text{ injective} \iff f \text{ bijective} \iff f \text{ surjective}$$

Démonstration :

$$\begin{array}{lll} f \text{ injective} & \Leftrightarrow \ker f = \{0_E\} & \\ & \Leftrightarrow \dim(\ker f = \{0_E\}) = 0 & \\ & \Leftrightarrow \dim E = \operatorname{rg} f & \text{(Théorème du rang)} \\ & \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = E & (\operatorname{Im} f \subset F \text{ et égalité des dimensions}) \\ & \Leftrightarrow f \text{ surjective} & \end{array}$$

Ainsi, si f est injective, alors elle est surjective et donc bijective.
Si f est bijective, alors elle est injective et donc bijective. $\square$